تمارين محلولة

تمرين01

أحسب مايلي: 1) $(1+3i)(2-5i)$

2) $(1+3i)(-2+i)-(-3+i)(1+i)$

3) $(2-3i)^2-i(1+3i)$

الحل

1) $(1+3i)(2-5i)=2-5i+6i+15=\boxed{17+i}$

2) $(1+3i)(-2+i)-(-3+i)(1+i)=$

$(-2+i-6i-3)-(-3-3i+i-1)=$

$(-5-5i)-(-4-2i)=-5-5i+4+2i=\boxed{-1-3i}$

3) $(2-3i)^2-i(1+3i)=(4-12i-9)-i+3$

$=\boxed{-2-13i}$

تمرين02

باستعمال الجداءات الشهيرة ، احسب ما يلي :

1) $(1+i)^3$. 2) $(2-3i)(2+3i)$. 3) $(2-i)^3$.

4) $i(1+2i)^2-(-1+i)^2$.

الحل

1) $(1+i)^3=1^3+3i+3i^2+i^3$

$=1+3i-3-i=\boxed{-2+2i}$

2) $(2-3i)(2+3i)=2^2-(3i)^2$

$$=4-9i^2=4+9=\boxed{13}$$

3) $(2-i)^3=2^3-3(2)^2i+3(2)(i)^2-i^3$

$$=8-12i-6+i=\boxed{2-11i}$$

4) $i(1+2i)^2-(-1+i)^2=$

$$i(1+4i-4)-(1-2i-1)=i(-3+4i)+2i$$

$$=\boxed{-4-i}$$

تمرين03

اكتب العبارات الآتية على شكل جداء عاملين :

$L=4(2+i)^2+9$ ، $L_1=(1+2i)^3+8i$ ، $L_2=(3+2i)^2+(1+i)^2$.

الحل

$$L=4(2+i)^2+9=\left[2(2+i)\right]^2-(3i)^2$$

$$=\left[2(2+i)-3i\right]\left[2(2+i)+3i\right]$$

$$=\boxed{(4-i)(4+5i)}$$

$L_1=(1+2i)^3+8i=(1+2i)^3-(2i)^3$ ، نعلم أن :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ومنه :

$$L_1=(1+2i-2i)\left[(1+2i)^2+2i(1+2i)+(2i)^2\right]$$

$$=1\times(1+4i-4+2i-4-4)=\boxed{(-11+6i)}$$

$$L_2=(3+2i)^2+(1+i)^2=(3+2i)^2-i^2(1+i)^2$$

$$=(3+2i)^2-\left[i(1+i)\right]^2=(3+2i)^2-(-1+i)^2$$

$$=\left[(3+2i)-(-1+i)\right]\left[(3+2i)+(-1+i)\right]$$

$$=\boxed{(4+i)(2+3i)}$$

تمرين04

1- أ) احسب i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

ب) استنتج حساب : $i^n\ (n\in\mathbb{N})$.

2- احسب : $(1+i)^2$ ، $(1+i)^{2002}$.

الحل

1- أ) $i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=+1$

$i^5=i^4\times i=(+1)i=i$ ، $i^6=i^4\times i^2=(+1)(-1)=-1$

$i^7=i^6\times i=(-1)i=-i$ ، $i^8=i^4\times i^4=+1$

ب)نستنتج من الدراسة السابقة أنه إذا كان : $n=4k\ (k\in\mathbb{N})$

فإن: $i^n=1$ و إذا كان : $n=4k+1\ (k\in\mathbb{N})$ فإن : $i^n=i$

و إذا كان : $n=4k+2\ (k\in\mathbb{N})$ فإن : $i^n=-1$.

و إذا كان : $n=4k+3\left(k\in\mathbb{N}\right)$ فإن : $i^n=-i$.

2) حساب : $\left(1+i\right)^2$ ، $\left(1+i\right)^{2002}$.

$\left(1+i\right)^2=2i$.

$$\left(1+i\right)^{2002}=\left[\left(1+i\right)^2\right]^{1001}=\left(2i\right)^{1001}$$

$$=2^{1001}\times i^{1001}=\boxed{2^{1001}i}$$

(لأن $1001=4\times250+1$ من الشكل $4k+1$) .

تمرين05

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $i\left(1+i\right)^2-\left(1-2i\right)^2$.

2) $\dfrac{3-i}{\left(1+i\right)^2}$ ، $\dfrac{-1+3i}{1-2i}$ ، $i^3\times\dfrac{1-i}{1+i}$.

الحل

1) $$i\left(1+i\right)^2-\left(1-2i\right)^2=i\left(2i\right)-\left(-3-4i\right)$$

$$=\boxed{1+4i}$$

2) $$\frac{3-i}{\left(1+i\right)^2}=\frac{3-i}{2i}=\frac{\left(3-i\right)\left(-i\right)}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}$$

$$\frac{-1+3i}{1-2i}=\frac{\left(-1+3i\right)\left(1+2i\right)}{\left(1-2i\right)\left(1+2i\right)}=\frac{-7+i}{5}=\boxed{\frac{-7}{5}+\frac{1}{5}i}$$

$$i^3\times\frac{1-i}{1+i}=-i\times\frac{1-i}{1+i}=\frac{-1-i}{1+i}=-\frac{1+i}{1+i}=\boxed{-1}$$

تمرين06

أكتب على الشكل الجبري.

1) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{2+i}{1+i}$. 2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-i}$. 3) $\left(1+i\right)^{32}-\dfrac{5i}{1+2i}$

الحل

1) $$\frac{1+i}{1-i}+\frac{2+i}{1+i}=\frac{\left(1+i\right)^2+\left(2+i\right)\left(1-i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}$$

2) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}-i}=\frac{1+\sqrt{2}+i}{\left(1+\sqrt{2}-i\right)\left(1+\sqrt{2}+i\right)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+i}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1}=\boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4+2\sqrt{2}}i}$$

3) $$\left(1+i\right)^{32}-\frac{5i}{1+2i}=\left[\left(1+i\right)^2\right]^{16}-\frac{5i\left(1-2i\right)}{\left(1+2i\right)\left(1-2i\right)}$$

$$=\left(2i\right)^{16}-\frac{10+5i}{5}=2^{16}\times\left(i^4\right)^4-\left(2+i\right)$$

$$=\boxed{\left(2^{16}-2\right)-i}$$

تمرين07

α عدد مركب حيث : $\alpha = x+iy$.

نضع $L=(1-2i)\alpha+1+3i$. 1) عين α لكي يكون $L=0$.

2) أ - عين مرافق L ($\overline{L}$) . ب- استنتج مجموعة النقاط M ذات اللاحقة α التي من أجلها يكون $L=\overline{L}$.

الحل

1) تعيين α لكي $L=0$:

$$L=(1-2i)\alpha+1+3i=(1-2i)(x+iy)+1+3i$$

$$=(x+2y+1)+i(-2x+y+3)$$

$L=0$ يكافئ $\begin{cases}x+2y+1=0\\-2x+y+3=0\end{cases}$ ومنه $(x;y)=(1;-1)$

إذن $\boxed{\alpha=1-i}$

2)- أ) تعيين مرافق L ($\overline{L}$) .

$$\overline{L}=(x+2y+1)-i(-2x+y+3)$$

ب) تعيين مجموعة النقاط M ذات اللاحقة α :

$L=\overline{L}$ يكافئ $(x+2y+1)-i(-2x+y+3)=(x+2y+1)+i(-2x+y+3)$

ومنه: $2i(-2x+y+3)=0$ ومنه : $-2x+y+3=0$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هو المستقيم (D) ذو المعادلة:

$-2x+y+3=0$.

تمرين08

نعتبر العدد المركب $L=i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)$ حيث $z=x+iy$.

1) عين بطريقتين مختلفتين $\overline{L}$.

2) أحسب $L+\overline{L}$ ثم استنتج مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها يكون L تخيليا صرفا .

الحل

1) تعيين L بطريقتين مختلفتين :

ط1 :

$$\overline{L}=\overline{i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)}=\overline{i}\times\frac{\overline{z-2i}}{\overline{z+i}}=-i\times\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}-i}$$

$$=\frac{-i(x-iy)+2}{x-iy-i}=\frac{(2-y)-ix}{x-(y+1)i}$$

$$=\frac{[(2-y)-ix][x+(y+1)i]}{[x-(y+1)i][x+(y+1)i]}$$

$$=\frac{3x}{x^2+(y+1)^2}-\frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2}i$$

ط2 :

$$L=i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)=\frac{iz+2}{z+i}=\frac{i(x+iy)+2}{x+iy+i}$$

$$=\frac{(2-y)+ix}{x+i(y+1)}=\frac{[(2-y)+ix][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$= \frac{3x}{x^2+(y+1)^2} + \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2} i$$

ومنه : $$\overline{L} = \frac{3x}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2} i$$

2) حساب $L+\overline{L}$ واستنتاج مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا .

$$L+\overline{L} = \frac{6x}{x^2+(y+1)^2} .$$

نعلم أن L تخيليا صرفا معناه : $L+\overline{L}=0$.

$L+\overline{L}=0$ يكافئ $\frac{6x}{x^2+(y+1)^2}=0$ ومنه :

($x=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$).

إذن مجموعة النقاط $M(z)$ المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور التراتيب) باستثناء النقطة $(0;-1)$.

تمرين09

نعتبر العدد المركب $L=\frac{iz-(1+i)}{z-2i}$ حيث : $z=x+iy$.

1) عين مجموعة النقاط M ذات ا للاحقة z من أجلها يكون L حقيقيا .

2) عين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا .

الحل

لنكتب L على الشكل الجبري:

$$L=\frac{iz-(1+i)}{z-2i}=\frac{i(x+iy)-(1+i)}{x+iy-2i}$$

$$=\frac{(-y-1)+i(x-1)}{x+i(y-2)}$$

$$=\frac{[(-y-1)+i(x-1)][x-i(y+2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]}$$

$$=\frac{-3x-y+2}{x^2+(y-2)^2}+\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y-2)^2}i$$

1) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها يكون L حقيقيا.

L حقيقي يعني تخيلي L معدوما ومنه :

$\left(\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y-2)^2}=0\right.$ و $\left.(x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه :

$\left(x^2+y^2-x-y-2=0\right.$ و $\left.(x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه :

$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0\right.$ و

$\left.(x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$ و $\left((x;y)\neq(0;2)\right)$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ المطلوبة هي الدائرة (C) التي

مركزها $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$ باستثناء النقطة $(0;2)$

2) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا.

L تخيلي يعني حقيقي L معدوما ومنه :

$$\left(\frac{-3x-y+2}{x^2+(y-2)^2}\right)=0$$ مع $\left((x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه :

$(-3x-y+2=0$ مع $\left((x;y)\neq(0;2)\right)$.

مجموعة النقط $M(z)$ المطلوبة هي المستقيم (D) ذو المعادلة :

$\boxed{-3x-y+2=0}$ ، باستثناء النقطة $(0;2)$.

تمرين10

ليكن L العدد المركب المعرف بـ : $L=\frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

1) - أ) عين $\overline{L}$ (مرافق L)

- ب) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ ذات اللاحقة z بحيث يكون L حقيقيا.

2) عين مجموعة النقط $M(z)$ من أجلها تكون $\arg(L)\equiv\pi[2\pi]$.

الحـــل

1)- أ) تعيين مرافق L .

$$\overline{L}=\overline{\left(\frac{z-4-2i}{z+2+i}\right)}=\frac{\overline{z}-4+2i}{\overline{z}+2-i}=\frac{x-iy-4+2i}{x-iy+2-i}$$

$$=\frac{(x-4)-i(y-2)}{(x+2)-i(y+1)}$$

$$=\frac{\left[(x-4)-i(y-2)\right]\left[(x+2)+i(y+1)\right]}{\left[(x+2)-i(y+1)\right]\left[(x+2)+i(y+1)\right]}$$

$$=\frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}+\frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2}i$$

ب) استنتاج مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون L حقيقيا.

لدينا :

$$\overline{L}=\frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}+\frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2}i$$

و نعلم أن : $\overline{\overline{L}}=L$ ومنه فإن :

$$L=\frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}-\frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2}i$$

L حقيقي يعني تخيلي L معدوما ومنه :

($3x-6y=0$ و $(x;y)\neq(-2;-1)$) ومنه :

($x-2y=0$ و $(x;y)\neq(-2;-1)$) .

مجموعة النقط هي المستقيم $(D): x-2y=0$ باستثناء النقطة $(-2;-1)$.

2) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من أجلها تكون $\arg(L)\equiv\pi[2\pi]$.

$\arg(L)\equiv\pi[2\pi]$ يكافئ (تخيلي $L=0$ و حقيقي $L<0$)

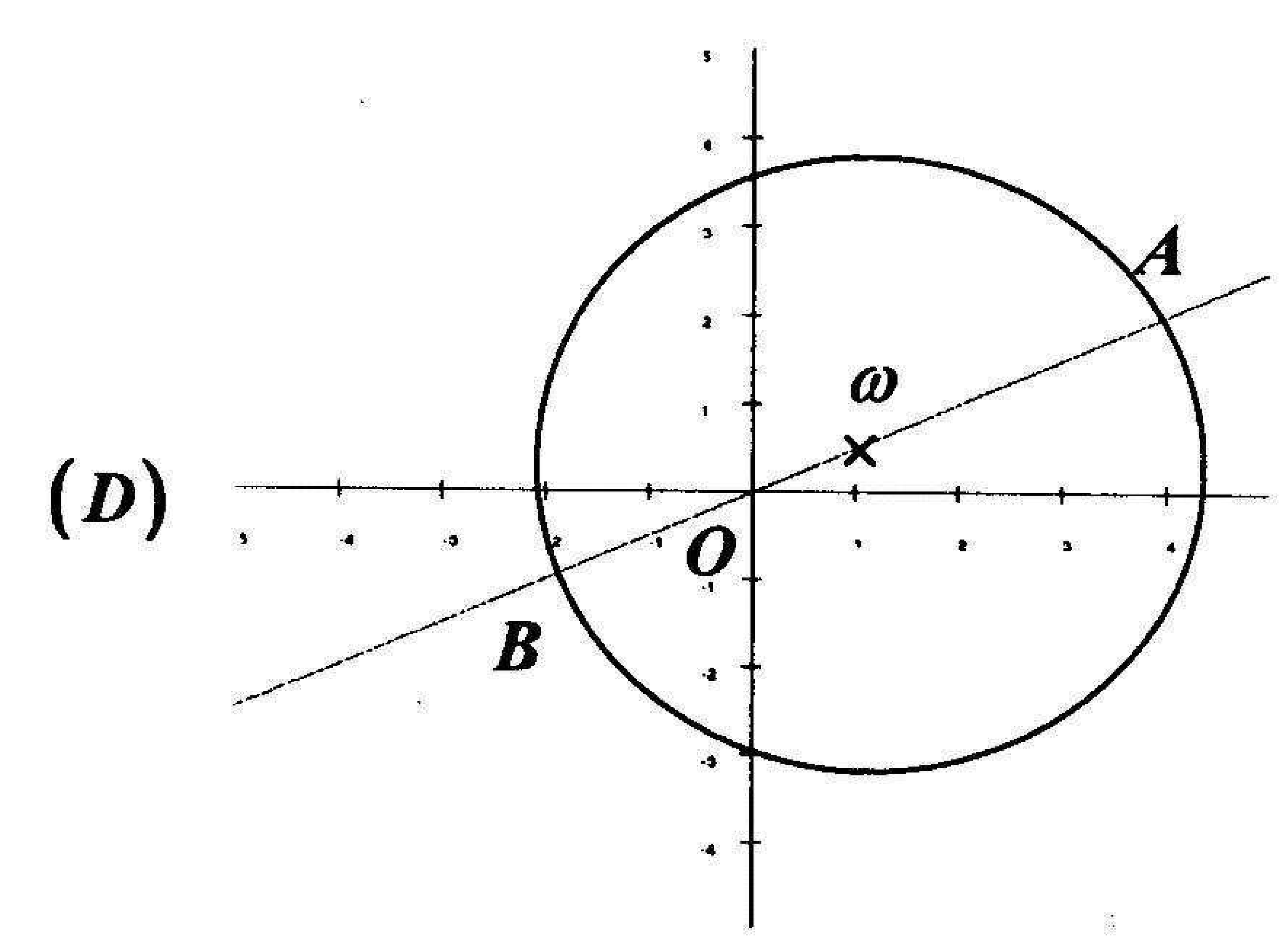
يكافئ [$3x-6y=0$ و $x^2+y^2-2x-y-10<0$

و $(x;y)\neq(-2;-1)$] ومنه :

[$x-2y=0$ و $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}<0$

و $(x;y)\neq(-2;-1)$]

إذن مجموعة النقط $M(z)$ تنتمي إلى المستقيم (D) ذو المعادلة $x-2y=0$ و تنتمي إلى القرص الذي مركزه $\omega\left(1;\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $\frac{\sqrt{45}}{2}$ و هي ممثلة بالقطر $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .



تمرين 11

في مستوي الأعداد المركبة المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، M ، C ذات اللواحق على الترتيب $1+i$ ، z ، iz حيث : $z=x+iy$.

1) عين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A.

2) عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $|z-1-i|=|iz-z|$

الحـــل

1) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$:

$$Z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=iz-1-i$$
$$=i(x+iy)-1-i=(-1-y)+i(x-1)$$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-y-1\\x-1\end{pmatrix}$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$:

$$Z_{\overrightarrow{AM}} = Z_M - Z_A = z-1-i$$
$$=(x-1)+i(y-1)$$
ومنه : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$.

يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A إذا كان $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه :

$(x-1)(-y-1)+(y-1)(x-1)=0$ ومنه :

$(x-1)(-y-1+y-1)=0$ ومنه $-2(x-1)=0$

ومنه $x=1$.

إذ ن مجموعة النقط المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

2) تعيين مجموعة النقط $M(z)$:

$|z-1-i|=|iz-z|$ يكافئ

$$|(x-1)+i(y-1)|=|(-y-x)+i(x-y)|$$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2=(-x-y)^2+(x-y)^2$

ومنه : $x^2+y^2+2x+2y-2=0$ ومنه :

$(x+1)^2+(y+1)^2-4=0$ ومنه:

$(x+1)^2+(y+1)^2=4$. إ ذ ن مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها $\omega(-1;-1)$ ونصف قطرها 2 .

تمرين 12

أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي :

$z_1=-2+2i$; $z_2=5-5\sqrt{3}i$; $z_3=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$;

$z_4=-2\sqrt{3}-6i$

الحـل

$|z_1|=2\sqrt{2}$ ، إذا كانت θ_1 هي عمدة z_1 فإن :

$\cos\theta_1=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه θ_1 تنتمي إلى الربع الثاني ومنه : $\theta_1\equiv\pi-\frac{\pi}{4}\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

إذن $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$|z_2|=10$ ، إذا كانت θ_2 هي عمدة z_2 فإن : $\cos\theta_2=\frac{1}{2}$

و $\sin\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه θ_2 تنتمي إلى الربع الرابع ومنه :

$\theta_2\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_2=10\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$.

$|z_3|=2\sqrt{2}$ ، إذا كانت θ_3 هي عمدة z_3 فإن : $\cos\theta_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $\sin\theta_3=\frac{1}{2}$ ومنه θ_3 تنتمي إلى الربع الأول ومنه:

$\theta_3 \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ إذن $z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

$|z_4| = 4\sqrt{3}$ ، إذا كانت θ_4 هي عمدة z_4 فإن : $\cos\theta_4 = -\frac{1}{2}$

و $\sin\theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه θ_4 تنتمي إلى الربع الثالث ومنه :

$$\theta_4 \equiv \pi + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$$

إذن $z_4 = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

تمرين 13

1) اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي :

$L=(-1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)$ ، $L_1=(1+i)^3(-2i)$ ،

$L_2=\left(\sqrt{3}+i\right)^3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ،

$L_3 = i^{2003}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)^2$.

2) أكتب الأعداد L ، L_1 ، L_2 على الشكل الأسي .

الحل

1) * $|L| = |-1+i|\times\left|\sqrt{3}-i\right| = 2\sqrt{2}$

$$\arg L \equiv \arg(-1+i)+\arg\left(\sqrt{3}-i\right)$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$$

ومنه : $L = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

* $|L_1| = |1+i|^3\times|-2i| = \left(\sqrt{2}\right)^3\times 2 = 4\sqrt{2}$

$$\arg L_1 \equiv \arg(1+i)^3+\arg(-2i)$$

$$\equiv 3\arg(1+i)+\arg(-2i)\equiv\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ومنه : $L_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

* $|L_2| = \left|\sqrt{3}+i\right|^3\times\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = 2^3\times 1 = 8$

$$\arg L_2 \equiv \arg\left(\sqrt{3}+i\right)^3+\arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$\equiv 3\arg\left(\sqrt{3}+i\right)+2\arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\equiv 3\times\frac{\pi}{6}+2\times\frac{2\pi}{3}\equiv\frac{11\pi}{6}[2\pi]$$

ومنه : $L_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

$|L_3| = |i|^{2003} \times \left|\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right|^2 = |i|^{2003} \times \left(\sqrt{8}\right)^2 = 1\times 8 = 8$ *

$\arg L_3 \equiv \arg\left(i^{2003}\right) + \arg\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)^2$

$\equiv 2003\times \arg(i) + 2\arg\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)$

$\equiv 2003\times \frac{\pi}{2} + 2\times\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv 1001\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \equiv 1002\pi + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

ومنه : $L_3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2) $L = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ، $L_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $L_2 = 8e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

تمرين 14

اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$z_1 = \left(\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}\right)^4$ ، $z_2 = \frac{(1-i)^3}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}$ ، $z_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}+i}\right)^{30}$

الحل

$z_1 = \left(\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}\right)^4 = \left(\frac{\left(5+11\sqrt{3}i\right)\left(7+4\sqrt{3}i\right)}{\left(7-4\sqrt{3}i\right)\left(7+4\sqrt{3}i\right)}\right)^4$

$z_1 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^4$ ومنه : $|z_1| = \left|-1+\sqrt{3}i\right|^4 = 2^4 = 16$

$\arg(z_1) \equiv \arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4 \equiv 4\arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

$\equiv 4\times\frac{2\pi}{3} \equiv 2\pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

ومنه : $z_1 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

$|z_2| = \frac{|1-i|^3}{\left|1+i\sqrt{3}\right|^2} = \frac{\sqrt{2}^3}{2^2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg(z_2) \equiv \arg(1-i)^3 - \arg\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$

$\equiv 3\times\arg(1-i) - 2\times\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)$

$\equiv -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{17\pi}{12}[2\pi]$

و منه: $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-17\pi}{12}\right)\right)$.

$|z_3| = \frac{|i|^{30}}{\left|\sqrt{3}+i\right|^{30}} = \frac{1}{2^{30}}$

$\arg(z_3) \equiv \arg\left(i^{30}\right) - \arg\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}$

$\equiv 30\times\arg(i) - 30\times\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$

$$\equiv \frac{30\pi}{2} - \frac{30\pi}{6} \equiv 15\pi - 5\pi\left[2\pi\right]$$

$$\equiv 10\pi \equiv 0\left[2\pi\right]$$

ومنه : $z_3 = \frac{1}{20^{30}}\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

تمرين 15

اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$z_1 = \sin\theta - i\cos\theta$ ، $z_2 = -\sin\theta + i\cos\theta$ ،

$z_3 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ حيث: $\theta \in \left[0;2\pi\right]$

الحل

$$z_1 = \sin\theta - i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

ومنه : $\boxed{z_1 = \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.

$$z_2 = -\sin\theta + i\cos\theta = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$z_3 = 1+\cos\theta + i\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

- إذا كان $\theta \in \left]0;\pi\right[$ فإن $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ إذن $\cos\frac{\theta}{2} > 0$

ومنه : $\boxed{z_3 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$.

- إذا كان $\theta \in \left]\pi;2\pi\right[$ فإن $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ إذن $\cos\frac{\theta}{2} < 0$

ومنه : $\boxed{z_3 = -2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]}$.

تمرين 16

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $2iz + 2 - i = (1+i)z + 1$

2) $(1-2iz)(1+i)^2 - (1+i)z = 0$

3) $\frac{iz}{1+i} + \frac{z-1}{1-i} = 0$.

الحل

1) $2iz + 2 - i = (1+i)z + 1$ ومنه :

$2iz - (1+i)z = -1 + i$ ومنه :

$(-1+i)z=-1+i$ ومنه $z=\dfrac{-1+i}{-1+i}=\boxed{1}$

2) $(1-2iz)(1+i)^2-(1+i)z=0$ ومنه :

$(1+i)^2-(1+i)^2.2iz-(1+i)z=0$ ومنه :

$2i+4z-(1+i)z=0$ ومنه: $2i+(4-1-i)z=0$

ومنه : $(3-i)z=-2i$ ومنه $z=\dfrac{-2i}{3-i}=\boxed{\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i}$.

3) $\dfrac{iz}{1+i}+\dfrac{z-1}{1-i}=0$ ومنه $\dfrac{(1-i)iz+(1+i)(z-1)}{(1+i)(1-i)}=0$

ومنه: $\dfrac{iz+z+z-1+iz-i}{2}=0$ ومنه :

$\dfrac{(2+2i)z-(1+i)}{2}=0$ ومنه : $(2+2i)z=1+i$

ومنه : $z=\dfrac{1+i}{2(1+i)}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

تمرين 17

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $(1+i)z-(2+3i)\bar{z}-1+9i=0$

2) $(z+2i)(\bar{z}+1-3i)=14+2i$

3) $z\bar{z}+(z-\bar{z})-2i-5=0$

الحل

نضع $z=x+iy$ ومنه $\bar{z}=x-iy$.

1) $(1+i)z-(2+3i)\bar{z}-1+9i=0$ ومنه :

$(1+i)(x+iy)-(2+3i)(x-iy)-1+9i=0$ ومنه :

$(-x-4y-1)+i(-2x+3y+9)=0$ ومنه :

$\begin{cases}-x-4y-1=0\\-2x+3y+9=0\end{cases}$ ومنه $(x=3;y=-1)$ ومنه :

$z=\boxed{3-i}$

2) $(z+2i)(\bar{z}+1-3i)=14+2i$ ومنه :

$z\bar{z}+(1-3i)z+2i\bar{z}+2i(1-3i)=14+2i$ ومنه :

$x^2+y^2+(1-3i)(x+iy)+2i(x-iy)+6+2i=14+2i$

ومنه :

$x^2+y^2+x+3y+(y-3x)i+2y+2xi-8=0$ ومنه

$(x^2+y^2+x+5y-8)+i(-x+y)=0$ يكافئ

$\begin{cases}x^2+y^2+x+5y-8=0\\-x+y=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2x^2+6x-8=0\\x=y\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}x_1=-4 \quad \text{أو} \quad x_2=1\\x=y\end{cases}$ ومنه حلول المعادلة هي:

$z_1=\boxed{-4-4i}$ و $z_2=\boxed{1+i}$

3) $z\bar{z}+\left(z-\bar{z}\right)-2i-5=0$ يكافئ

$\left(x^2+y^2-5\right)+2i\left(y-1\right)=0$ ومنه $\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\2\left(y-1\right)=0\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\y=1\end{cases}$ ومنه : $x=-2$ أو $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

ومنه حلول المعادلة هي: $z_1=\boxed{2+i}$ و $z_2=\boxed{-2+i}$

تمرين 18

احسب الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية:

$$z_1=-3+4i \text{ ، } z_2=8-6i \text{ ، } z_3=4\left(\frac{11+2i}{1+2i}\right)$$

الحل

- إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z_1 فإن $\alpha^2=z_1$.

$\alpha^2=z_1$ يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=-3 & ....(1)\\x^2+y^2=\left|z_1\right|=5 & ....(2)\\xy=2 & ....(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=1$ ومنه : ($x_1=1$ أو $x_2=-1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=2$ و $y_2=-2$ ومنه :

$\alpha_1=\boxed{1+2i}$ و $\alpha_2=\boxed{-1-2i}$

- إذا كان $\beta=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z_2 فإن $\beta^2=z_2$.

$\beta^2=z_2$ يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=8 & ....(1)\\x^2+y^2=\left|z_2\right|=10 & ....(2)\\xy=-3 & ....(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=9$ ومنه : ($x_1=-3$ أو $x_2=+3$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=1$ و $y_2=-1$ ومنه :

$\beta_1=\boxed{-3+i}$ و $\beta_2=\boxed{3-i}$

$$z_3=4\left(\frac{11+2i}{1+2i}\right)=4\frac{\left(11+2i\right)\left(1-2i\right)}{5}=4\left(3-4i\right)$$

- إذا كان $\delta=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z_3 فإن $\delta^2=z_3$

$\delta^2=z_3$ يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=12 & ....(1)\\x^2+y^2=\left|z_3\right|=20 & ....(2)\\xy=-8 & ....(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=16$ ومنه : ($x_1=-4$ أو $x_2=4$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=2$ و $y_2=-2$ ومنه :

$\delta_1=\boxed{-4+2i}$ و $\delta_2=\boxed{4-2i}$

تمرين 19

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول z :

1) $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$.

2) $z^2-(3-2i)z+5-i=0$.

3) $z^2-(1+i\sqrt{3})z+i\sqrt{3}=0$.

4) $(1+i)z^2-2(1+4i)z-(3-11i)=0$.

<u>**الحل**</u>

1) $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$

$$\Delta=(1-3i)^2+8(1+i)=2i=(1+i)^2$$

ومنه : $z_1=\dfrac{-(1-3i)-(1+i)}{2}=\boxed{-1+i}$

$$z_2=\frac{-(1-3i)+(1+i)}{2}=\boxed{2i}$$

2) $z^2+(3-2i)z+5-i=0$

$$\Delta=(3-2i)^2-4(5-i)=-15-8i$$

- إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2=\Delta$.

$\alpha^2=\Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=-15 & \dots(1)\\ x^2+y^2=17 & \dots(2)\\ xy=-4 & \dots(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=1$ ومنه : ($x_1=1$ أو $x_2=-1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=-4$ و $y_2=4$ ومنه :

$\alpha_1=1-4i$ و $\alpha_2=-1+4i$

ومنه حلول المعدلة هي : $z_1=\dfrac{(3-2i)+(1-4i)}{2}=\boxed{2-3i}$

$$z_2=\frac{(3-2i)-(1-4i)}{2}=\boxed{1+i}$$

3) $z^2-(1+i\sqrt{3})z+i\sqrt{3}=0$

$$\Delta=(1+i\sqrt{3})^2-4i\sqrt{3}=-2-2i\sqrt{3}$$

- إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2=\Delta$.

$\alpha^2=\Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=-2 & \dots(1)\\ x^2+y^2=4 & \dots(2)\\ xy=-\sqrt{3} & \dots(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=1$ ومنه : ($x_1=1$ أو $x_2=-1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=-\sqrt{3}$ و $y_2=+\sqrt{3}$ ومنه :

$\alpha_1=1-\sqrt{3}i$ و $\alpha_2=-1+\sqrt{3}i$

ومنه حلول المعدلة هي : $z_1=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)}{2}=\boxed{1}$

$$z_2=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)-\left(1-\sqrt{3}i\right)}{2}=\boxed{\sqrt{3}i}$$

4) $(1+i)z^2-2(1+4i)z-(3-11i)=0$

$$\Delta'=(1+4i)^2+(1+i)(3-11i)=-1=i^2$$

ومنه حلول المعادلة هي :

$$z_1=\frac{(1+4i)+i}{(1+i)}=\frac{1+5i}{1+i}=\frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\boxed{3+2i}$$

$$z_2=\frac{(1+4i)-i}{(1+i)}=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\boxed{2+i}$$

تمرين20

1) عين العددين الحقيقيين α و β حيث: $(\alpha+\beta i)^2=48-14i$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+(1-3i)z+(-14+2i)=0$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة حيث: $\mathrm{Re}(z_2)<0$.

3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط C ، A ، B ذات اللواحق على الترتيب : $-3-i$ ، z_1 ، z_2 .

- برهن أن المثلث CAB قائم الزاوية في C.

الحــل

1) تعيين العددين α و β .

$(\alpha+\beta i)^2=48-14i$ يكافئ

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=48 & ....(1)\\ \alpha^2+\beta^2=50 & ....(2)\\ \alpha\beta=-7 & ....(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد $\alpha^2=49$ ومنه : ($\alpha_1=7$ أو $\alpha_2=-7$)

بالتعويض في (3)نجد : $\beta_1=-1$ و $\beta_2=1$ ومنه :

$$(\alpha;\beta)\in\{(7;-1),(-7;1)\}$$

2) حلول المعادلة: $z^2+(1-3i)z+(-14+2i)=0$

$$\Delta=(1-3i)^2-4(-14+2i)=-8-6i+56-8i$$

$$=48-14i=(7-i)^2$$ (من السؤال الأول)

ومنه :

$$z_1=\frac{-(1-3i)-(7-i)}{2}=\boxed{-4+2i}$$

$$z_2=\frac{-(1-3i)+(7-i)}{2}=\boxed{3+i}$$

3)البرهان على أن المثلث CAB قائم الزاوية في C.

$$Z_{\overrightarrow{AC}}=Z_C-Z_A=(-3-i)-(3+i)=-6-2i$$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$.

$$Z_{\overrightarrow{BC}}=Z_C-Z_B=(-3-i)-(-4+2i)=1-3i$$

ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

لدينا : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=(-6)(+1)+(-2)(-3)=0$

إذن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ ومنه المثلث CAB قائم الزاوية في C .

تمرين21

α عدد مركب غير معدوم .

1) تحقق أن $\alpha^2+2(\alpha+1)i+2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد يطلب تعيينه .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2+2(\alpha+2+2i)z+2\alpha(1+i)+6i=0$.

3) عين α لكي يكون جذري المعادلة متعاكسان .

الحل

1) التحقق بأن $\alpha^2+2(\alpha+1)i+2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد.

$$[(\alpha+1)+i]^2=(\alpha+1)^2+2(\alpha+1)i-1$$

$$=\alpha^2+2\alpha+2(\alpha+1)i$$

إذن $\alpha^2+2(\alpha+1)i+2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد $(\alpha+1)+i$

2) حل المعادلة: $z^2+2(\alpha+2+2i)z+2\alpha(1+i)+6i=0$

$$\Delta'=(\alpha+2+2i)^2-2\alpha(1+i)-6i$$

$$=(\alpha+2)^2+2(\alpha+2)\times 2i-4-2\alpha-2\alpha i-6i$$

$$=(\alpha^2+4\alpha+4)+4\alpha i+8i-4-2\alpha-2\alpha i-6i$$

$$=\alpha^2+2\alpha+2\alpha i+2i=\alpha^2+2\alpha+2(\alpha+1)i$$

$$=[(\alpha+1)+i]^2$$

ومنه :

$$z_1=-(\alpha+2+2i)+(\alpha+1)+i=\boxed{-1-i}$$

$$z_2=-(\alpha+2+2i)-(\alpha+1)-i=\boxed{(-2\alpha-3)-3i}$$

3) تعيين α لكي يكون جذري المعادلة z_1 و z_2 متعاكسان .

z_1 و z_2 متعاكسان يعني $z_1+z_2=0$ ومنه :

$-2\alpha-4-4i=0$ ومنه : $\alpha+2+2i=0$ ومنه

$$\alpha=\boxed{-2-2i}$$

تمرين22

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+\sin\alpha)z+\frac{1}{2}i\sin\alpha=0$

حيث: $\alpha\in]0;\pi[$. 2) أكتب الجذرين z' و z'' على الشكل المثلثي .

3) عين α لكي يكون $z'=z''$

الحل

1) حل المعادلة : $z^2-(1+\sin\alpha)z+\frac{1}{2}i\sin\alpha=0$

$$\Delta=(1+i\sin\alpha)^2-4\times\frac{1}{2}i\sin\alpha$$

$$=(1-\sin^2\alpha)+2i\sin\alpha-2i\sin\alpha=\cos^2\alpha$$

$$z' = \frac{(1+i\sin\alpha)-\cos\alpha}{2} = \frac{(1-\cos\alpha)+i\sin\alpha}{2}$$

ومنه :

$$= \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\alpha}{2}}{2} =$$

إذن : $z' = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$$z'' = \frac{(1+i\sin\alpha)+\cos\alpha}{2} = \frac{(1+\cos\alpha)+i\sin\alpha}{2}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$$

إذن : $z'' = \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

2) كتابة z' و z'' على الشكل المثلثي .

$$z' = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

و بما أن $\frac{\alpha}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\sin\frac{\pi}{2}>0$ ومنه

$$z' = \sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

و بما أن $\frac{\alpha}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}>0$ ومنه :

$$z'' = \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

3) تعيين α بحيث $z' = z''$

$z' = z''$ يكافئ $|z''| = |z'|$ و $\arg(z'') = \arg(z') + 2K\pi$

يكافئ $\left(\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\right.$ و $\left.\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2K\pi\right)$

ومنه : $\alpha = \boxed{\frac{\pi}{2} + 2K\pi}$

تمرين23

α عدد مركب معلوم طويلته r و عمدته θ .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - \alpha(\alpha+i)z + i\alpha^3 = 0$$

2) أكتب z' و z'' جذري المعادلة على الشكل المثلثي .

3) نفرض $\alpha = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. أ – احسب z'^{2000} و z''^{2000} .

ب – عين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z')^n$ و $(z'')^n$ حقيقيان .

الحــل

1) حل المعادلة: $z^2 - \alpha(\alpha+i)z + i\alpha^3 = 0$

$$\Delta = \alpha^2(\alpha+i)^2 - 4i\alpha^3 = \alpha^2\left[(\alpha+i)^2 - 4i\alpha\right]$$
$$= \alpha^2\left(\alpha^2 - 2i\alpha + i^2\right) = \alpha^2(\alpha-i)^2$$
$$z' = \frac{\alpha(\alpha+i)+\alpha(\alpha-i)}{2} = \alpha^2$$
$$z' = \frac{\alpha(\alpha+i)-\alpha(\alpha-i)}{2} = \alpha i$$

2) كتابة z' و z'' على الشكل المثلثي .

لدينا $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ومنه :

$z' = \alpha^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ ،

$$z'' = \alpha i = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$$

3) أ - حساب z'^{2000} و z''^{2000} .

$$z'^{2000} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2000\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2000\right)$$
$$= \cos(1000\pi) + i\sin(1000\pi) = 1$$

(لأن $\sin K\pi = 0$ و $\cos K\pi = 1$ إذا كان K زوجيا)

$$z''^{2000} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\times 2000\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\times 2000\right)$$
$$= \cos(1500\pi) + i\sin(1500\pi) = 1$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z')^n$ و $(z'')^n$ حقيقيان.

لدينا : $z' = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ، $z'' = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

ومنه :

$$(z')^n = \cos\left(n\times\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(n\times\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(z'')^n = \cos\left(n\times\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\times\frac{3\pi}{4}\right)$$

$z'^n \in \mathbb{R}$ و $z''^n \in \mathbb{R}$ يكافئ

$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ ومنه :

($\frac{n\pi}{2} = K\pi$ و $n\frac{3\pi}{4} = K'\pi$ حيث $(K;K') \in \mathbb{N}^2$)

ومنه : ($n = 2K$ و $3n = 4K'$) ومنه :

($n = 2K$ و $n = 4K''$) ومنه n من مضاعفات 4.

تمرين24

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0$.

1) بين أن هذه المعادلة تقبل جذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة . ليكن z_1 ، z_2 الجذرين الآخرين للمعادلة حيث $|z_1| < |z_2|$.

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب.

- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحـــل

1) تعيين الجذر الحقيقي z_0 للمعادلة :

z_0 جذر للمعادلة يعني $z_0^3 - iz_0^2 + (1-i)z_0 - 2 + 2i = 0$

ومنه : $(z_0^3 + z_0 - 2) + i(-z_0^2 - z_0 + 2) = 0$ ومنه :

$$\begin{cases} z_0^3 + z_0 - 2 = 0 & .....(1) \\ -z_0^2 - z_0 + 2 = 0 & .....(2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تقبل حلين $z_0' = -2$ ، $z_0'' = 1$ حيث الجذر $z_0'' = 1$ يحقق المعادلة (1) فهو مقبول و الجذر الثاني $z_0' = -2$ لا يحقق المعادلة (1) فهو مرفوض و منه $z_0 = 1$.

2) حل المعادلة : $z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0....*$

$$z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = (z-1)(z^2 + az + c)$$

$$= z^3 + (a-1)z^2 + (c-a)z - c$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a - 1 = -i \\ c - a = 1 - i \\ -c = -2 + 2i \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 1 - i \\ c = 2 - 2i \end{cases}$

* يكافئ $(z-1)\left[z^2 + (1-i)z + 2 - 2i\right] = 0$ ومنه :

($z = 1$ أو $z^2 + (1-i)z + 2 - 2i = 0.....**$)

** معادلة من الدرجة الثانية مميزها Δ حيث :

$$\Delta = (1-i)^2 - 4(2-2i) = -8 + 6i$$

إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2 = \Delta$.

$\alpha^2 = \Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & ....(1) \\ x^2 + y^2 = 10 & ....(2) \\ xy = 3 & ....(3) \end{cases}$ بجمع (1) و(2)

نجد $x^2 = 1$ ومنه : ($x_1 = 1$ أو $x_2 = -1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1 = 3$ و $y_2 = -3$ ومنه :

$\alpha_1 = 1 + 3i$ و $\alpha_2 = -1 - 3i$ ومنه :

$$z_1 = \frac{-(1-i) - (1+3i)}{2} = \boxed{-1-i}$$

$$z_2 = \frac{-(1-i) + (1+3i)}{2} = \boxed{2i}$$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_0 = 1$ ، $z_1 = -1 - i$ ، $z_2 = 2i$

3) طبيعة المثلث ABC :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_1 - z_0 = -2 - i$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_2 - z_0 = -1 + 2i$ ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2)(-1) + (-1)(+2) = 0$$

إذن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ و منه المثلث ABC قائم الزاوية في A و متساوي الساقين.

تمرين25

ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^3+2iz^2+\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}+3i$$

1) برهن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ، نرمز بـ z_1 للجذر الذي جزؤه الحقيقي سالب و بـ z_2 للجذر الثالث .

3) أ – أكتب z_0 ، z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي .

ب – احسب العدد المركب $L=\left(z_0\right)^{2000}+\left(z_1\right)^{1992}+\left(z_2\right)^{1998}$

الحـــل

1)تعيين الجذر التخيلي z_0 :

إذا كان $z_0=\alpha i$ جذرا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z)=0$ فإن:

$P(\alpha i)=0$ ومنه :

$$2(\alpha i)^3+2i(\alpha i)^2+\left(1+i\sqrt{3}\right)(\alpha i)+\sqrt{3}+3i=0$$

ومنه $-2\alpha^3 i-2\alpha^2 i+\alpha i-\alpha\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i=0$ ومنه :

$\sqrt{3}(1-\alpha)+i\left(-2\alpha^3-2\alpha^2+\alpha+3\right)=0$ يكافئ

$\begin{cases}\sqrt{3}(1-\alpha)=0\\-2\alpha^3-2\alpha^2+\alpha+3=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ ومنه : $z_0=i$

2) حل المعادلة $P(z)=0$:

$$P(z)=(z-i)\left(2z^2+az+c\right)$$
$$=2z^3+(a-2i)z^2+(c-ai)z-ci$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a-2i=2i\\c-ai=1+i\sqrt{3}\\-ci=\sqrt{3}+3i\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=4i\\c=-3+\sqrt{3}i\end{cases}$

$P(z)=0$ ومنه $(z-i)\left(2z^2+4iz-3+\sqrt{3}i\right)=0$ ومنه

($z=i$ أو $2z^2+4iz-3+\sqrt{3}i=0$)

$$\Delta'=(2i)^2-2\left(-3+\sqrt{3}i\right)=2-2\sqrt{3}i$$

إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ' فإن $\alpha^2=\Delta'$

$\alpha^2=\Delta'$ يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=2\ ....(1)\\x^2+y^2=4\ ....(2)\\xy=-\sqrt{3}\ .....(3)\end{cases}$ بجمع (1) و(2) نجد

$x^2=3$ ومنه : ($x_1=\sqrt{3}$ أو $x_2=-\sqrt{3}$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=-1$ و $y_2=1$ ومنه :

$\alpha_1=\sqrt{3}-i$ و $\alpha_2=-\sqrt{3}+i$ ومنه :

$$z_1=\frac{-2i-\left(\sqrt{3}-i\right)}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\frac{-2i+\left(\sqrt{3}-i\right)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

إذن حلول المعادلة $P(z)=0$ هي :

$$z_0=i \quad ، \quad z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad ، \quad z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

3) كتابة z_0 ، z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي .

$$z_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

لدينا $|z_1|=1$ وإذا كانت θ_1 هي عمدة z_1 فإن $\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $\sin\theta_1=-\frac{1}{2}$ ومنه : $\theta_1\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$ و بالتالي:

$z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$.

لدينا $|z_2|=\sqrt{3}$ وإذا كانت θ_2 هي عمدة z_2 فإن $\cos\theta_2=\frac{1}{2}$

و $\sin\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه: $\theta_2\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]$ و التالي:

$z_2=\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$.

ب- حساب العدد $L=(z_0)^{2000}+(z_1)^{1992}+(z_2)^{1998}$

$$L=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times2000\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\times2000\right)$$
$$+\cos\left(\frac{7\pi}{6}\times1992\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\times1992\right)$$
$$+3^{999}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\times1998\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\times1998\right)\right]$$

$$L=\cos(1000\pi)+i\sin(1000\pi)$$
$$+\cos(2324\pi)+i\sin(2324\pi)$$
$$+3^{999}\left[\cos(-666\pi)+i\sin(-666\pi)\right]$$

$$L=(1+0)+(1+0)+3^{999}(1+0)=\boxed{2+3^{999}}$$

تمرين26

عين الجذرر من الرتبة الرابعة للعدد المركب : $z=8\sqrt{2}(1+i)$

الحــل

إذا كان . $z=8\sqrt{2}(1+i)=16\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ هو جذر من الرتبة الرابعة للعدد z فإن :

$\alpha^4=z$ يكافئ

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=16\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ يكافئ

($r^4=16$ و $4\theta=\frac{\pi}{4}+2K\pi$) ومنه : $r=2$ و

$\theta=\frac{\pi}{16}+K\frac{\pi}{2}$ مع $K\in\{0,1,2,3\}$ ومنه الجذور من الرتبة الرابعة للعدد z هي: $\alpha_0=2\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$ ،

$\alpha_1=2\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$ ،

$\alpha_2=2\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$ ،

$\alpha_3=2\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$.

تمرين27

1) حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة :

$$\begin{cases}(1+i)z'-(1+2i)z''=2+i\\(1-i)z'+(2+i)z''=1+2i\end{cases}$$

2) احسب $L=\left(\frac{z'}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(z''\right)^{2002}$

الحل

1) حل الجملة :

$$\begin{cases}(1+i)z'-(1+2i)z''=2+i & ....(1)\\(1-i)z'+(2+i)z''=1+2i & ....(2)\end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في $-(1-i)$ و المعادلة (2) في $(1+i)$

نجد:

$$\begin{cases}-2z'+(3+i)z''=-3+i & ....(3)\\2z'+(1+3i)z''=-1+3i & ....(4)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (3) و (4) نجد: $4(1+i)z''=-4(1-i)$

ومنه : $z''=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\boxed{i}$

بتعويض z'' بـ i في المعادلة (1) نجد : $(1+i)z'=2i$ ومنه :

$z'=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i(1-i)}{2}=\boxed{1+i}$.

2) حساب العدد $L=\left(\frac{z'}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(z''\right)^{2002}$

$z'=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$z''=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

$L=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 2000\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 2000\right)+$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2002\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2002\right)$

$$L=\cos 500\pi+i\sin 500\pi+\cos 1001\pi+i\sin 1001\pi$$
$$=(1+0)+(-1+0)=0$$

تمرين28

1) أ – اكتب $z_0=1+i\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي .

ب – عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_0^{\,n}$ حقيقيا .

2) ليكن z_1 العدد المركب المعرف كما يلي :

$$z_0\times z_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

- أكتب z_1 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري .

3) استنتج قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

الحـل.

1) كتابة z_0 على الشكل المثلثي و تعيين n ليكون $z_0^{\,n}$ حقيقيا .

$|z_0|=2$ إذا كان θ هي عمدة z_0 فإن $\cos\theta=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

إذن $z_0^{\,n}=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$

$z_0^{\,n}\in\mathbb{R}$ معناه تخيلي $z_0^{\,n}$ معدوم ومنه : $\sin n\frac{\pi}{3}=0$

ومنه : $n\frac{\pi}{3}=K\pi$ ومنه : $n=3K\ \ (K\in\mathbb{N})$

2) كتابة z_1 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري .

لدينا : $z_0\times z_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ومنه :

$$z_1=\frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{z_0}$$ ومنه :

$$z_1=\frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$ ومنه :

$$z_1=\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

ومنه : $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

3) استنتاج قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

لدينا : $z_0\times z_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ومنه :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$ ومنه

ومنه : $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

ومنه : $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$

$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

تمرين29

1)احسب الجذور التكعيبية للعدد $L=-2+2i$

2) أ – احسب $(1+i)^3$.   ب – عين الجذور التكعيبية للعدد 1 على الشكل الجبري.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+2(1-i)=0$.

4) استنتج قيمة $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

الحــل

1)حساب الجذور التكعيبية للعدد $L=-2+2i$

$L=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

إذا كان $\beta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جذرا تكعيبيا للعدد L فإن $\beta^3=L$.

$\beta^3=L$ يكافئ

$r^3(cs3\theta+i\sin3\theta)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ يكافئ

($r^3=2\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{2K\pi}{3}$ حيث $K\in\{0,1,2\}$ ومنه :

($r=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

و $\theta=\frac{3\pi+8K\pi}{12}$ حيث $K\in\{0,1,2\}$) ومنه :

$\beta_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$\beta_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ ،

$\beta_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

2) أ – حساب $(1+i)^3$

$(1+i)^3=(1+i)(1+i)^2=(1+i)\times2i=-2+2i$

ب – تعيين الجذور التكعيبية للعدد 1 على الشكل الجبري.

$1=\cos0+i\sin0$ ، $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جذرا تكعيبيا للعدد 1 .

$\alpha^3=1$ ومنه $r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos0+i\sin0$

يكافئ ($r^3=1$ و $\theta=\frac{2K\pi}{3}$ حيث $K\in\{0,1,2\}$) ومنه :

$$\alpha_0=1$$

$$\alpha_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ ،}$$

$$\alpha_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=$$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن الجذور التكعيبية للعدد 1 هي:

$\alpha_0=1$ ، $\alpha_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\alpha_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) حل المعادلة $z^3+2(1-i)=0$.

$z^3+2(1-i)=0$ ومنه : $z^3=-2+2i=(1+i)^3$ ومنه

ومنه : $\left(\frac{z}{1+i}\right)^3=1$ إذن $\frac{z}{1+i}$ جذرا تكعيبيا للعدد 1. ومنه :

$\frac{z}{1+i}=1$ أو $\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{z}{1+i}=1$ ومنه : $z=1+i$.

$\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه :

$$z=(1+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه :

$$z=(1+i)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

4) استنتاج قيمة $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

لدينا $z^3=-2+2i=L$ ومنه z جذرا تكعيبيا للعدد L ،إذن حلول هذه المعادلة z_0 ، z_1 ، z_2 هي الجذور التكعيبية للعدد L

لدينا $z_0=1+i$ ، $z_1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ ،

$$z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\text{ .}$$

و نعلم أن الجذور التكعيبية للعدد L على الشكل المثلثي هي:

$$\beta_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\text{ ،}$$

$$\beta_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{2}+i\sin\frac{11\pi}{2}\right)\text{ ،}$$

$$\beta_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{2}+i\sin\frac{19\pi}{2}\right)\text{ .}$$

نعلم أن $\cos\frac{11\pi}{12}<0$ و $\sin\frac{11\pi}{12}>0$ ومنه :

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

ومنه : $\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

إذن : $\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

تمرين30

α عدد مركب طويلته r و عمدته $\theta\in]-\pi;+\pi[$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\alpha(1+3i)-2\alpha^2(1-i)=0$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة حيث $|z_1|<|z_2|$

2) أ - أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ب – حدد r و θ بحيث يكون $z_1=z_2^2$.

3) نفرض أن $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $r=\sqrt{2}$. أ – عين العدد الطبيعي n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا . ب – احسب z_2^{2000} .

الحل

1) حل المعادلة : $z^2-\alpha(1+3i)-2\alpha^2(1-i)=0$

$$\Delta=\alpha^2(1+3i)^2+8\alpha^2(1-i)$$

$$=\alpha^2(-8+6i)+8\alpha^2-8\alpha^2 i$$

$$=-2\alpha^2 i=\alpha^2(-2i)=\alpha^2(1-i)^2$$

ومنه : $z_1=\frac{\alpha(1+3i)+\alpha(1-i)}{2}=\alpha+\alpha i=\alpha(1+i)$

$$z_2=\frac{\alpha(1+3i)-\alpha(1-i)}{2}=2\alpha i$$

2) أ – كتابة z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

$$|z_1|=|\alpha(1+i)|=|\alpha||1+i|=r\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1)\equiv\arg[\alpha(1+i)]\equiv\arg(\alpha)+\arg(1+i)$$

$$\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$$

ومنه : $z_1=r\sqrt{2}\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$|z_2|=|2\alpha i|=|\alpha||2i|=2r$$

$$\arg(z_2)\equiv\arg[2\alpha i]\equiv\arg(\alpha)+\arg(2i)$$

$$\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$$

ومنه : $z_2=2r\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

ب –تعيين r و θ بحيث يكون $z_1=z_2^2$.

$z_1 = z_2^2$ يكافئ ($|z_2^2| = |z_1|$ و $\arg(z_2^2) = \arg(z_1) + 2K\pi$)

يكافئ ($4r^2 = r\sqrt{2}$ و $2\arg(z_2) = \arg(z_1) + 2K\pi$) يكافئ

($r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2K\pi$) ومنه :

($r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2K\pi$)

و بما أن $\theta \in]-\pi, +\pi[$ فإن $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\theta = -\frac{3\pi}{4}$.

3) أ – تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا .

إذا كان $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

و $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

و لدينا : $z_1^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

z_1^n تخيليا صرفا يعني حقيقي z_1^n معدوم ومنه : $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$

ومنه : $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi = \frac{\pi}{2}(2K+1)$ ومنه :

$n = 2k+1 \ (K \in \mathbb{N})$.

إذن مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا هي :

مجموعة الأعداد الفردية $n = 2k+1 \ (K \in \mathbb{N})$.

ب – حساب z_2^{2000}.

$$z_2^{2000} = \left(2\sqrt{2}\right)^{2000}\left(\cos 2000\times\frac{3\pi}{4} + i\sin 2000\times\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{8}\right)^{2000}\left(\cos 1500\pi + i\sin 1500\pi\right)$$

$$= 8^{1000}\times(1+0) = \boxed{8^{1000}}$$

تمرين 31

1) عين العدد الحقيقي α حيث: $(2+\alpha i)^2 = 3+4i$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2(1-2i)z + 3(3+4i) = 0$

نرمز لحلي المعادلة بـ z_1 و z_2 حيث $\mathrm{Re}(z_1) < 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، $5-5i$.

3) أ – برهن أن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب – عين لاحقة D لكي يكون الرباعي $ABCD$ مستطيلا .

4) ليكن العدد المركب $L = \frac{z-z_2}{z-z_1}$. عين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا.

الحل

1) تعيين العدد الحقيقي α حيث : $(2+\alpha i)^2 = 3+4i$.

$(2+\alpha i)^2 = 3+4i$ يكافئ $(4-\alpha^2) + 4\alpha i = 3+4i$ ومنه :

($4-\alpha^2 = 3$ و $4\alpha = 4$) ومنه : $\alpha = 1$.

2) حل المعادلة $z^2-2(1-2i)z+3(3+4i)=0$.

$$\Delta'=(1-2i)^2-3(3+4i)=-12-16i=-4(3+4i)$$
$$=4i^2(2+i)^2=\left[2i(2+i)\right]^2=(-2+4i)^2$$

ومنه : $z_1=1-2i+(-2+4i)=-1+2i$

$z_2=1-2i-(-2+4i)=3-6i$

3) أ- البرهان بأن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_2-z_1=4-8i$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$.

$z_{\overrightarrow{BC}}=(5-5i)-z_2=2+i$ ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4(2)+(-8)(1)=0$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$

فالمثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب – تعيين لاحقة النقطة D .

$ABCD$ مستطيل معناه : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ يكافئ

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ يكافئ $z_2-z_1=z_C-z_D$ ومنه :

$z_D=z_C-z_2+z_1$ ومنه :

$z_D=(5-5i)-(3-6i)+(-1+2i)=1+3i$

4) تعيين مجموعة النقط $M(z)$.

$$L=\frac{z-z_2}{z-z_1}=\frac{(x+iy)-(3-6i)}{(x+iy)-(-1+2i)}=\frac{(x-3)+i(y+6)}{(x+1)+i(y-2)}$$
$$=\frac{\left[(x-3)+i(y+6)\right]\left[(x+1)-i(y-2)\right]}{\left[(x+1)+i(y-2)\right]\left[(x+1)-i(y-2)\right]}$$
$$=\frac{x^2+y^2-2x+4y-15}{(x+1)^2+(y-2)^2}+i\frac{8x+4y}{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

L تخيليا صرفا معناه حقيقي $L=0$ ومنه :

$x^2+y^2-2x+4y-15=0$ و $(x;y)\neq(-1;2)$ ومنه :

$(x-1)^2+(y+2)^2-1-4-15=0$ و

$(x;y)\neq(-1;2)$ ومنه : $(x-1)^2+(y+2)^2=20$

و $(x;y)\neq(-1;2)$. إذن مجموعة النقط M لكي يكون L تخيليا صرفا هي الدائرة التي مركزها $\omega(1;-2)$ و نصف قطرها $2\sqrt{5}$ باستثناء النقطة $(-1;2)$.

تمرين32

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(2-7i)z-13(1+i)=0$

نرمز لحلي المعادلة بـ z_1 و z_2 بحيث يكون الجزء الحقيقي لـ z_1 موجبا تماما .

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

A و B صورتا العددين المركبين z_1 و z_2 على الترتيب .

أ-عين المركز ω للتشابه S الذي نسبته 2 و زاويته $\frac{3\pi}{2}$ و الذي يحول النقطة A إلى النقطة B.

ب – عين لاحقة C صورة النقطة B بالتشابه S .

3) أ– عين لاحقة النقطة D مرجع الجملة

$\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

ب – ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ عين المجموعة (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \ (K \in \mathbb{R})$.

الحـــل

1) حل المعادلة : $z^2-(2-7i)z-13(1+i)=0$

$$\Delta = (2-7i)^2+52(1+i) = 7+24i$$

إذا كان $\alpha = x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2=\Delta$.

$\alpha^2=\Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=7 & \dots(1) \\ x^2+y^2=25 & \dots(2) \\ xy=12 & \dots(3) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد:

$x^2=16$ ومنه : ($x_1=4$ أو $x_2=-4$)

بالتعويض في (3) نجد : $y_1=3$ ، $y_2=-3$.

ومنه : $\alpha_1=4+3i$ ، $\alpha_2=-4-3i$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_1=\frac{(2-7i)+(4+3i)}{2}=3-2i$

$z_2=\frac{(2-7i)-(4+3i)}{2}=-1-5i$.

2) أ – تعيين مركز التشابه S :

العبارة المركبة للتشابه S هي $z'=\alpha z+\beta$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2$ و $|\alpha|\neq 1$.

لدينا : $\alpha=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i$

و لدينا : $S(A)=B$ ومنه $z_2=\alpha z_1+\beta$ و منه:

$\beta=z_2-\alpha z_1$.

إذن $\beta=(-1-5i)+2i(3-2i)=3+i$ فيكون

: $z'=-2iz+3+i$. و مركز التشابه S هي النقطة ω ذات اللاحقة $\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{5}=1-i$.

جـ - تعيين لاحقة النقطة C .

لدينا $S(B)=C$ و منه:

$$z_C=-2iz_2+3+i$$
$$=-2i(-1-5i)+3+i=-7+3i$$

3) أ - تعيين لاحقة النقطة D .

$$z_D=\frac{z_1-z_2+z_C}{1-1+1}=(3-2i)-(-1-5i)-7+3i$$
$$=-3+6i$$

ب – طبيعة الرباعي $ABCD$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_2 - z_1 = -4-3i$ ، $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -4-3i$ ومنه

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فيكون

($AB = DC$ و $(AB)//(DC)$) فالرباعي $ABCD$ فيه ضلعان متقابلان متقايسان و حاملاهما متوازيان فهو متوازي الأضلاع و بما أن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ فهو مستطيل .

جـ - تعيين المجموعة (γ) .

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = K$ ومنه :

$MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = K$.

$DA^2 = |z_1 - z_D|^2 = |6-8i|^2 = 100$ ،

$DB^2 = |z_2 - z_D|^2 = |2-11i|^2 = 125$ ،

$DC^2 = |z_C - z_D|^2 = |-4-3i|^2 = 25$.

$MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = MD^2 + 100 - 125 + 25 = K$

ومنه : $MD^2 = K$.

إذا كان $K > 0$ فإن المجموعة (γ) هي دائرة مركزها D و نصف قطرها $R = \sqrt{K}$.

إذا كان $K < 0$ فإن المجموعة (γ) هي مجموعة خالية.

إذا كان $K = 0$ فإن المجموعة (γ) هي النقطة D .

تمرين33

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 - 4(1+2i)z^2 + (-18+20i)z + 3(8+4i)$$

1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$. نرمز لحلول المعادلة بـ : z_0 ، z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$.

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2 .

3) أ – عين العدد الحقيقي λ لكي تقبل الجملة $\{(A;\lambda),(B;-1),(C;1)\}$ النقطة D ذات اللاحقة $-1+2i$ مرجعا .

ب – عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق :

$$-2MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \quad (K \in \mathbb{R})$$.

الحــل

1)البرهان على أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 .

إذا كان : $z_0 = iy$ فإن : $P(iy) = 0$ ومنه :

$$-iy^3 + 4y^2(1+2i) + iy(-18+20i) + 3(8+4i) = 0$$

يكافئ

$$\begin{cases} -y^3 + 8y^2 - 18y + 12 = 0 \quad ...(1) \\ 4y^2 - 20y + 24 = 0 \quad ...(2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تقبل حلين $y_1 = 2$ أو $y_2 = 3$ حيث y_1 يحقق المعادلة (1) فهو الحل المقبول أما y_2 فهو مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة (1) و منه $z_0 = 2i$.

2) حل المعادلة $P(z)=0$.

$$P(z)=(z-2i)(z^2+az+c)$$
$$=z^3+(a-2i)z^2+(c-2ai)z-2ci$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a-2i=-4(1+2i) \\ c-2ai=-18+20i \\ -2ci=3(8+4i) \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a=-4-6i \\ c=-6+12i \end{cases}$

$P(z)=0$ يكافئ

$$(z-2i)\left[z^2-(4+6i)z-6+12i\right]=0$$

ومنه : $z_0=2i$ أو $z^2-(4+6i)z-6+12i$

$$\Delta'=(2+3i)^2-(-6+12i)=(-5+12i)+6-12i=1$$

ومنه : $z_1=(2+3i)-1=1+3i$ ،

$z_2=(2+3i)+1=3+3i$.وبالتالي حلول المعادلة $P(z)=0$ هي:

$z_0=2i$ ، $z_1=1+3i$ ، $z_2=3+3i$

3) أ – تعيين العدد الحقيقي λ .

لكي تقبل الجملة $\{(A;\lambda),(B;-1),(C;1)\}$ مرجعا يجب أن يكون $\lambda+(-1)+(+1)\neq 0$ ومنه: $\lambda\neq 0$.

تكون النقطة $D(1-2i)$ مرجعا لهذه الجملة إذا كان

$z_D=\dfrac{\lambda z_0-z_1+z_2}{\lambda}$ ومنه :

$-1+2i=\dfrac{2\lambda i-(1+3i)+3+3i}{\lambda}$ ومنه :

$\lambda(-1+2i)=2\lambda i+2$ ومنه $\lambda=-2$.

ب– تعيين مجموعة النقط $M(z)$

$-2MA^2-MB^2+MC^2=K$ ومنه :

$$-2MD^2-2DA^2-DB^2+DC^2=K$$

$DA^2=|z_0-z_D|^2=1$ ، $DB^2=|z_1-z_D|^2=|2+i|^2=5$ ،

$$DC^2=|z_2-z_D|^2=|4+i|^2=17$$

$-2MD^2-2-5+17=K$ ومنه :

$MD^2=\dfrac{10-K}{2}$.

إذا كان $K<10$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها D و نصف قطرها $R=\sqrt{\dfrac{10-K}{2}}$.

إذا كان $K=10$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة D .

إذا كان $K>10$ فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

تمرين34

نعتبر الأعداد المركبة : $z_1=1+i$ ، $z_2=2\left(-1+i\right)$ ، $z_3=-3-i$.

1) أ – احسب $z_1^{\ 2002}$.

ب – عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_2^{\ n}\in\mathbb{R}_+^*$.

2)نعتبر في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، z_3 .

أ - λ عدد حقيقي ، عين E مجموعة قيم λ لكي تقبل الجملة $\left\{(A;\lambda),(B;1),(C;1)\right\}$ النقطة G_λ مرجحا .

ب – عين مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda\in E$.

3) نعتبر الدوران R الذي يحول النقطة A إلى B و النقطة B إلى C .

أ – عين العناصر المميزة للدوران R .

ب – عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R .

الحـــل

1) حساب $z_1^{\ 2002}$.

$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ومنه :

$$z_1^{\ 2002}=2^{1001}\left[\cos\left(2002\times\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2002\times\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^{1001}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+500\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+500\pi\right)\right]$$

$$=2^{1001}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2^{1001}i$$

ب – تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_2^{\ n}\in\mathbb{R}_+^*$.

$z_2=2\left(-1+i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ومنه :

$$z_2^{\ n}=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3\pi}{4}\times n+i\sin\frac{3\pi}{4}\times n\right)$$

$z_2^{\ n}\in\mathbb{R}_+^*$ يكافئ $\begin{cases}\sin\frac{3\pi\times n}{4}=0\\ \cos\frac{3\pi\times n}{4}>0\end{cases}$ يكافئ

$\frac{3\pi\times n}{4}=2K\pi$ ومنه $3n=8K$ حيث $K\in\mathbb{N}$

(حسب نظرية غوس فإن8 تقسم n (أي n من مضاعفات 8)

.

2) أ – تعيين مجموعة قيم λ .

لكي تقبل الجملة $\left\{(A;\lambda),(B;1),(C;1)\right\}$ مرجحا يجب أن يكون $\lambda+1+1\neq0$ أي $\lambda\neq-2$ ومنه $E=\mathbb{R}-\left\{-2\right\}$.

ب – تعيين مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda\in E$.

من أجل كل عدد λ حيث: $\lambda\in E$ فإن $z_{G_\lambda}=\frac{\lambda z_1+z_2+z_3}{\lambda+2}$

$$z_{G_\lambda} = \frac{\lambda-5}{\lambda+2} + i\frac{\lambda+1}{\lambda+2} = \left(1-\frac{7}{\lambda+2}\right) + i\left(1-\frac{1}{\lambda+2}\right)$$

ومنه : $G_\lambda\left(1-\frac{7}{\lambda+2};1-\frac{1}{\lambda+2}\right)$ فيكون

$$\begin{cases} x_G = 1-\frac{7}{\lambda+2} & ...(1) \\ y_G = 1-\frac{1}{\lambda+2} & ...(2) \end{cases}$$
بضرب المعادلة (2) في (-7) ثم

بجمع المعادلتين نجد: $x_G - 7y_G - 6 = 0$.

فتكون مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$ هي المستقيم (D) ذو المعادلة : $x-7y-6=0$

3) أ – تعيين العناصر المميزة للدوران R .

نعلم أن عبارة الدوران R هي من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث : $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2$ و $|\alpha|=1$.

لدينا : $\begin{cases} R(A)=B \\ R(B)=C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z_2 = \alpha z_1 + \beta \\ z_3 = \alpha z_2 + \beta \end{cases}$ و منه :

$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1)$ ومنه : $\alpha = \frac{z_3-z_2}{z_2-z_1} = \frac{-1-3i}{-3+i}$

ومنه: $\alpha = \frac{(-1-3i)(-3-i)}{10} = i$.

لدينا : $z_2 = \alpha z_1 + \beta$ ومنه $\beta = z_2 - \alpha z_1 = -1+i$

إذن عبارة الدوران R هي $z' = iz - 1 + i$.

العناصر المميزة للدوران R هي الزاوية : $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

و المركز النقطة ذات اللاحقة $-1 = -\frac{1-i}{1-i} = \frac{-1+i}{1-i}$.

ب – تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A .

لدينا : $R(A) = A'$ ومنه :

$$z_{A'} = iz_A - 1 + i = i(1+i) - 1 + i$$
$$= -2+2i$$

تمرين35

نعتبر الأعداد المركبة : $-4i$ ، -2 ، $-2-2i$.

1) رتب هذه الأعداد المركبة لكي تشكل 3 حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $(1+i)$.

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المتتالية (z_n) المعرفة بحدها الأول $z_0 = -1-i$ و أساسها $(1+i)$

أ – احسب z_1 ، z_2 ، z_3 .   ب- احسب بدلالة n الحد العام z_n .

جـ - أكتب z_n على الشكل المثلثي ثم استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $z_n \in \mathbb{R}$.

3) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = (-1-i)z + (4+2i)$.

أ- ما طبيعة التحويل S وما هي عناصره المميزة ؟

ب- برهن أن التحويل $T = S \circ S \circ S \circ S$ هو تحاكي يطلب تعيين عناصره.

الحـــل

1) ترتيب الأعداد المركبة $-4i$ ، -2 ، $-2-2i$ لكي تشكل ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

لدينا : $(-2-2i)^2 = 8i$ و $(-2)(-4i) = 8i$

و بما أن $(-2-2i)^2 = (-2)(-4i)$ (الوسط الهندسي) فإن الحد $-2-2i$ هو الحد الوسط ، و يكون الترتيب كما يلي : -2 ، $-2-2i$ ، $-4i$. أو $-4i$ ، $-2-2i$ ، -2 . ويكون أساس المتتالية في الترتيب الأول : $\frac{-2-2i}{-2} = 1+i$ وهو المطلوب .

إذن ترتيب الحدود هو : -2 ، $-2-2i$ ، $-4i$.

2) أ – حساب z_1 ، z_2 ، z_3 :

$$z_1 = (1+i)z_0 = (1+i)(-1-i) = -2i$$

$$z_2 = (1+i)z_1 = (1+i)\times(-2i) = 2-2i$$

$$z_3 = (1+i)z_2 = (1+i)(2-2i) = 4$$

ب – حساب z_n بدلالة n:

$$z_n = z_0(1+i)^n = (-1-i)(1+i)^n$$

جـ - كتابة z_n على الشكل المثلثي ثم استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n.

$$|z_n| = |-1-i| \times |1+i|^n = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\arg(z_n) \equiv \arg(-1-i) + \arg(1+i)^n$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} + n \times \arg(1+i) \equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}(5+n)[2\pi]$$

ومنه : $z_n = \sqrt{2^{n+1}}\left[\cos\frac{(5+n)\pi}{4} + i\sin\frac{(5+n)\pi}{4}\right]$.

$z_n \in \mathbb{R}$ يكافئ $\sin\frac{\pi}{4}(5+n) = 0$ ومنه : $\frac{\pi}{4}(5+n) = K\pi$

و منه : $5+n = 4K$ ومنه $n = 4K-5$ حيث: $K \in \mathbb{N}$ و $K \geq 2$.

3) أ – طبيعة التحويل S و عناصره المميزة.

لدينا $z' = (-1-i)z + (4+2i)$ و بما أن $|-1-i| = \sqrt{2}$

و $\arg(-1-i) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$ فالتحويل S هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$

و زاويته $\frac{5\pi}{4}$ و مركزه النقطة ω ذات اللاحقة

$\frac{4+2i}{1-(-1-i)} = \frac{4+2i}{2+i} = 2$ ومنه : $\omega(2;0)$.

ب- البرهان على أن $T = S \circ S \circ S \circ S$ هو تحاكي يطلب تعيين عناصره.

نعلم أن تركيب n مرة التشابه S الذي مركزه ω و نسبته K و زاويته θ هو تشابه مركزه ω و نسبته K^n و زاويته $n \times \theta$.

فيكون $T = S \circ S \circ S \circ S$ هو تشابه مركزه ω و نسبته

$(\sqrt{2})^4$ و زاويته $4\times\frac{5\pi}{4}=5\pi$.والتشابه الذي زاويته $K\pi$

يعتبر تحاكي. فالتحويل T هو تحاكي مركزه ω ونسبته $4=(\sqrt{2})^4$

تمرين36

نعتبر العددين المركبين :

$$z=-8(\sqrt{3}-i) \quad \text{و} \quad L=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$$

1) أ – احسب طويلة وعمدة z . ب – احسب z^{2002} .

جـ - عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z^n\in\mathbb{R}$.

2) أ – احسب L^2 . ب – استنتج قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2+2(\sqrt{3}-2i)z-16(7-5\sqrt{3}i)=0$$

- تحقق أن $z=-8(\sqrt{3}-i)$ هو جذر للمعادلة ثم استنتج الجذر الآخر.

الحل

1) أ – حساب طويلة وعمدة z.

$|z|=|-8(\sqrt{3}-i)|=16$ ،

$$\arg(z)\equiv\arg[-8(\sqrt{3}-i)]\equiv\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

ب – حساب z^{2002} . لدينا $z=16\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$z^{2002}=16^{2002}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\times 2002+i\sin\frac{5\pi}{6}\times 2002\right)$$

$$=16^{2002}\left[\cos\left(1668\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(1668\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=16^{2002}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=16^{2002}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

جـ - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z^n\in\mathbb{R}$.

$z^n=16^n\left(\cos\frac{5\pi}{6}\times n+i\sin\frac{5\pi}{6}\times n\right)$.

$z^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\sin\frac{5\pi}{6}\times n=0$ ومنه : $\frac{5\pi}{6}\times n=K\pi$

ومنه : $5n=6K$ حيث : $K\in\mathbb{N}$.

و بتطبيق نظرية غوص نجد : $n=6h$ ، $(h\in\mathbb{N})$.

2) أ – حساب L^2 .

$$L^2=\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i\right]^2=-8\sqrt{3}+8i=z$$

ومنه L هو جذر تربيعي للعدد المركب z .

ب – استنتاج قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

لنعين أولا الجذور التربيعية للعدد المركب z على الشكل المثلثي .

إذا كان $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z

فإن $\alpha^2=z$.

ومنه : $\alpha^2 = z$

ومنه : $r^2\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right) = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

ومنه: ($2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ و $r^2 = 16$)

($r = 4$ و $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ مع $K \in \{0;1\}$)

ومنه : $\alpha_0 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ،

$\alpha_1 = 4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

بما أن $(\mathrm{Re})L > 0$ و $(\mathrm{Im})L > 0$ فإن $L = \alpha_0$ ومنه

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

ومنه : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3) التحقق من أن $z = -8\left(\sqrt{3} - i\right)$ هو جذر للمعادلة :

لدينا $z^2 + 2\left(\sqrt{3}-2i\right)z - 16\left(7 - 5\sqrt{3}i\right) = 0$ ومنه :

$$64\left(\sqrt{3}-i\right)^2 - 16\left(\sqrt{3}-2i\right)\left(\sqrt{3}-i\right) - 16\left(7-5\sqrt{3}i\right)$$

$$= 64\left(2 - 2\sqrt{3}i\right) - 16\left(1 - 3\sqrt{3}i\right) - 16\left(7 - 5\sqrt{3}i\right)$$

$$= \left(128 - 16 - 112\right) + i\left(-128\sqrt{3} + 48\sqrt{3} + 80\sqrt{3}\right) = 0$$

إذن $z = -8\left(\sqrt{3} - i\right)$ هو جذر للمعادلة .

نعلم أن مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية

$az^2 + bz + c = 0$ يساوي $-\frac{b}{a}$. ومنه فإن

$z' + z = -2\left(\sqrt{3} - 2i\right)$ ومنه :

$z' - 8\left(\sqrt{3} - 0i\right) = -2\left(\sqrt{3} - 2i\right)$ فيكون $z' = 6\sqrt{3} - 4i$.

تمرين37

نعتبر كثير الحدود التالي:

$$P(z) = z^3 + \left(8 - 10i\right)z^2 - \left(20 + 48i\right)z - 64 + 8i$$

1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعينه.

2) أ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

نرمز بـ z_0 ، z_1 ، z_2 لحلول المعادلة حيث $|z_2| > |z_1|$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط M_0 ، M_1 ، M_2 ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 .

ب - برهن على وجود تشابه S الذي يحول M_0 إلى M_1 و يحول M_1 إلى M_2 .

جـ - عين العناصر المميزة للتشابه S .

د - أكتب العبارة التحليلية للتشابه S .

الحـــل

1)البرهان على أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0

ليكن $z_0=iy$ حلا للمعادلة $P(z)=0$ ومنه : $P(iy)=0$

$P(iy)=0$ ومنه :

$-8y^2+48y-64+\left(-y^3+10y^2-20y+8\right)i=0$ ومنه

$$\begin{cases} -8y^2+48y-64=0 & ....(1) \\ -y^3+10y^2-20y+8=0 & ...(2) \end{cases}$$

المعادلة (1) تقبل حلين $y_1=2$ (مقبول) و $y_2=4$

(مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة (2)) ومنه $z_0=2i$.

2) أ - حل المعادلة $P(z)=0$.

$$P(z)=(z-2i)\left(z^2+az+c\right)$$
$$=z^3+(a-2i)z^2+(c-2ai)z-2ci$$

بالمطابقة نجد : $a=8-8i$ ، $c=-4-32i$.

$P(z)=0$ يكافئ $(z-2i)\left[z^2+(8-8i)z-4-32i\right]=0$

يكافئ ($z=2i$ أو $z^2+(8-8i)z-4-32i=0$) .

$\Delta'=(4-4i)^2-(-4-32i)=4$ ومنه :

$z_1=-(4-4i)+2=-2+4i$ ،

$z_2=-(4-4i)-2=-6+4i$.

إذن حلول المعادلة هي :

$z_0=2i$ ، $z_1=-2+4i$ ، $z_2=-6+4i$.

ب - البرهان على وجود تشابه S الذي يحول M_0 إلى M_1

و يحول M_1 إلى M_2 .

نعلم أن عبارة التشابه S هي $z'=\alpha z+\beta$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2$

و $|\alpha|\neq 1$.

لدينا :

$$\begin{cases} S(M_0)=M_1 \\ S(M_1)=M_2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z_1=\alpha z_0+\beta & ....(1) \\ z_2=\alpha z_1+\beta & ....(2) \end{cases}$$

$z_2-z_1=\alpha(z_1-z_0)$ ومنه $\alpha=\dfrac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=1+i$

و بالتعويض نجد : $\beta=z_1-\alpha z_0=2i$.

إذن يوجد تشابه S معرف بـ $z'=(1+i)z+2i$ يحول النقطة

M_0 إلى M_1 و يحول M_1 إلى M_2 .

جـ - العناصر المميزة للتشابه S .

عناصر المميزة للتشابه S هي النسبة و تساوي $\sqrt{2}=|1+i|$

و الزاوية وهي $\dfrac{\pi}{4}=\arg(1+i)$ و المركز وهو النقطة الصامدة

ذات اللاحقة $-2=\dfrac{2i}{1-(1+i)}$.

د – العبارة التحليلية للتشابه S .

لدينا $z'=(1+i)z+2i$ ومنه :

$$x'+iy'=(1+i)(x+iy)+2i=x-y+i(x+y+2)$$

ومنه : $\begin{cases}x'=x-y\\ y'=x+y+2\end{cases}$ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

تمرين38

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-(1+i)z^2-2(1+i)z+8=0$

علما أنها تقبل حلا حقيقيا z_0 . نرمز بـ z_0 ، z_1 ، z_2 لحلول المعادلة حيث $|z_1|<|z_2|$.

2) أ- احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2004}$.

ب- عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_1^n\in\mathbb{R}_-^*$.

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 .

أ – عين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب – عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث :

$MA^2+MB^2+MC^2=K\ ,(K\in\mathbb{R})$.

الحـــل

1) أ - البرهان على أن المعادلة تقبل جذرا حقيقيا z_0 .

ليكن $z_0=x$ حلا للمعادلة ومنه :

$x^3-(1+i)x^2-2(1+i)x+8=0$ ومنه :

$(x^3-x^2-2x+8)+i(-x^2-2x)=0$ ومنه :

$\begin{cases}x^3-x^2-2x+8=0 & ....(1)\\ -x^2-2x=0 & ....(2)\end{cases}$ المعادلة (2) تقبل حلين

$x_1=0$ (مرفوض) و $x_2=-2$ مقبول لأنه يحقق المعادلة (1) .

ومنه : $z_0=-2$.

ب – حل المعادلة :

$$(z+2)(z^2+az+c)=z^3+(a+2)z^2+(c+2a)z+2c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+2=-1-i\\ c+2a=-2(1+i)\\ 2c=8\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-3-i\\ c=4\end{cases}$

$P(z)=0$ ومنه : $(z+2)\left[z^2-(3+i)z+4\right]=0$

$z=-2$ أو $z^2-(3+i)z+4=0$

المعادلة الثانية من الدرجة الثانية مميزها

$$\Delta=(3+i)^2-16=-8+6i$$

و الجذور التربيعية للعدد Δ هي :

$\alpha_1=1+3i$ و $\alpha_2=-1-3i$

ومنه : $z_1=\frac{(3+i)-(1+3i)}{2}=1-i$ ،

$z_2=\frac{(3+i)+(1+3i)}{2}=2(1+i)$.

2) أ – حساب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2004}$

$z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$ ،

$z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2000}=\cos\frac{-\pi}{4}\times2000+i\sin\frac{-\pi}{4}\times2000$$

$$+\cos\frac{\pi}{4}\times2004+i\sin\frac{\pi}{4}\times2004$$

$$(\cos500\pi-i\sin500\pi)+(\cos501\pi+i\sin501\pi)$$

$$(1-0)+(-1+0)=0$$

ب – تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_1^n\in\mathbb{R}_-^*$.

$z_1^n=\sqrt{2}^n\left[\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right]$.

$z_1^n\in\mathbb{R}_-^*$ يكافئ $\begin{cases}-\sin\frac{n\pi}{4}=0\\ \cos\frac{n\pi}{4}<0\end{cases}$ ومنه $\frac{n\pi}{4}=(2K+1)\pi$

ومنه : $n=4(1+2K)=8K+4$ حيث $(K\in\mathbb{N})$

3) أ – تعيين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$Z_G=\frac{z_0+z_1+z_2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$$

ب- تعيين مجموعة النقط

$MA^2+MB^2+MC^2=K : M(z)$

نعلم أن :

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

$GA^2=|z_0-z_G|^2=\frac{50}{9}$ ، $GB^2=|z_1-z_G|^2=\frac{20}{9}$ ،

$GC^2=|z_2-z_G|^2=\frac{50}{9}$.

إذن $3MG^2=K-\frac{40}{3}$ ومنه : $MG^2=\frac{1}{3}\left(K-\frac{40}{3}\right)$.

إذا كان $K>\frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G

و نصف قطرها $R=\sqrt{\frac{1}{3}\left(K-\frac{40}{3}\right)}$.

إذا كان $K<\frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

إذا كان $K=\frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة G .

تمرين39

ليكن كثيرالحدود $P(z)=z^3+z^2+(-5+4i)z-21-12i$

1- أ) برهن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .   ب) حل المعادلة $P(z)=0$.

ولتكن z_0 ، z_1 ، z_2 جذورها حيث $|z_1|<|z_2|$.

2) نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 .

أ) عين طبيعة المثلث ABC .

ب) عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث.

جـ) عين مجموعة النقط $M(z)$ حيث :

$$|z-z_0|^2+|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=\frac{267}{9}$$

3) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C .

الحـــل

1) البرهان على أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 .

إذا كان $x=z_0$ جذرا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $P(x)=0$

$P(x)=0$ يكافئ $x^3+x^2+(-5+4i)x-21-12i=0$

ومنه : $(x^3+x^2-5x-21)+i(4x-2)=0$ ومنه :

$\begin{cases} x^3+x^2-5x-21=0 \\ 4x-12=0 \end{cases}$ ومنه : $x=3$ أي $z_0=3$

ب) حل المعادلة $P(z)=0$

$$P(z)=(z-3)(z^2+Az+C)$$
$$=z^3+(A-3)z^2+(C-3A)z-3C$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} A-3=1 \\ C-3A=-5+4i \\ -3C=-21-12i \end{cases}$

ومنه : $A=4$ ، $C=7+4i$

$P(z)=0$ يكافئ $(z-3)(z^2+4z+7+4i)=0$

ومنه : $z=3$ أو $z^2+4z+7+4i=0$.

المعادلة الثانية من الدرجة الثانية مميزها

$\Delta'=4-7-4i=-3+4i$

إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ' فإن $\alpha^2=\Delta'$

ومنه:

$\alpha^2=\Delta'$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=-3 & ....(1) \\ x^2+y^2=5 & ....(2) \\ xy=2 & ....(3) \end{cases}$

ومنه : $\alpha_1=1+2i$ ، $\alpha_2=-1-2i$. ومنه حلول المعادلة

هي: $z_0=3$ ، $z_1=-2+(1+2i)=-1+2i$ ،

$z_2=-2-(1+2i)=-3-2i$.

2 – أ) طبيعة المثلث ABC

ومنه : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_1 - z_0 = -4+2i$

ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ $Z_{\overrightarrow{BC}} = z_2 - z_1 = -2-4i$

$AB=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}$ ، $BC=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-4)(-2)+(+2)(-4)=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$

ومنه فالمثلث ABC قائم الزاوية في B ومتساوي الساقين .

ب) تعيين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = \frac{z_0+z_1+z_2}{3} = \frac{3+(-1+2i)+(-3-2i)}{3} = -\frac{1}{3}$$

جـ) تعيين مجموعة النقط $M(z)$.

ومنه : $|z-z_0|^2+|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=\frac{267}{9}$

ومنه : $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{267}{9}$

$$3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=\frac{267}{9}$$

حيث : $GA^2=\left|z_0+\frac{1}{3}\right|^2=\frac{100}{9}$ ، $GB^2=\left|z_1+\frac{1}{3}\right|^2=\frac{40}{9}$ ،

ومنه : $GC^2=\left|z_2+\frac{1}{3}\right|^2=\frac{100}{9}$

$3MG^2+\frac{100}{9}+\frac{40}{9}+\frac{100}{9}=\frac{267}{9}$ يكافئ $MG^2=1$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة (C) التي مركزها G ونصف قطرها 1.

3) تعيين العناصر المميزة للتشابه S .

نعلم أن عبارة التشابه S هي $z'=\alpha z+\beta$. ولدينا

$S(A)=A$ و $S(B)=C$ ومنه $z_0=\alpha z_0+\beta$

و $z_2=\alpha z_1+\beta$ فتكون : $z_2-z_0=\alpha(z_1-z_0)$

ومنه : $\alpha=\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=1+i$ ،

$$\beta=z_0-\alpha z_0=3-3(1+i)=-3i$$

ومنه: $z'=(1+i)z-3i$.

فالتحويل S هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته هي :

$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومركزه A .

تمرين40

نعتبر كثير الحدود $P(z)=z^4+17z^2-28z+260$ حيث z عدد مركب .

1) عين العدد ين الحقيقيين A و B بحيث:

$$P(z)=(z^2+Az+B)(z^2+4z+20)$$

2) حل في م المعادلة $P(z)=0$.

3– أ) أنشئ في معلم متعامد ومتجانس النقاط:
N ، H ، C ، K ذات اللواحق على الترتيب :
$-2+4i$ ، $-2-4i$ ، $2+3i$ ، $2-3i$.

ب) عين العدد المركب z الذي يحقق $\frac{z-z_C}{z-z_N}=i$ ، ثم أنشئ النقطة M صورة z .

4- أ) فسر هندسيا $\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|$ و عمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$.

ب) ما طبيعة المثلث NCM ؟ جـ) عين لاحقة D رابع رأس المربع $NMCD$.

الحل

1) تعيين العدد ين الحقيقيين A و B .

$$P(z)=\left(z^2+Az+B\right)\left(z^2+4z+20\right)$$
$$=z^4+(4+A)z^3+(20+4A+B)z^2+$$
$$(20A+4B)z+20B=z^4+17z^2-28z+260$$

بالمطابقة نجد:
$$\begin{cases}4+A=0\\20+4A+B=17\\20A+4B=-28\\20B=260\end{cases}$$
ومنه : $A=-4$ ، $B=13$

2) حل للمعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ يكافئ $\left(z^2-4z+13\right)\left(z^2+4z+20\right)=0$

$z^2+4z+20=0$ أو $z^2-4z+13=0$

$z^2-4z+13=0$ ، $\Delta'=2^2-13=-9=(3i)^2$

ومنه : $z_1=2-3i$ ، $z_2=2+3i$.

$z^2+4z+20=0$ ، $\Delta'=2^2-20=-16=16i^2$

ومنه : $z_3=-2-4i$ ، $z_4=-2+4i$.

تعيين العدد المركب الذي يحقق $\frac{z-z_C}{z-z_N}=i$

$\frac{z-z_C}{z-z_N}=i$ ومنه : $i\left(z-z_N\right)=z-z_C$ ومنه :

$z\left(1-i\right)=z_C-iz$ و منه : $z=\frac{z_C-iz_N}{1-i}$

إذن $z=\frac{2+3i-i\left(-2+4i\right)}{1-i}=\frac{6+5i}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{11}{2}i$

ومنه $M\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$.

4) التفسير الهندسي للنتيجة $\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|$ وعمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$.

$$\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|=\frac{\left|z-z_C\right|}{\left|z-z_N\right|}=\frac{MC}{MN}$$

$$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)=\arg\left(z-z_C\right)-\arg\left(z-z_N\right)$$

$$=\left(\vec{i},\overrightarrow{MC}\right)-\left(\vec{i},\overrightarrow{MN}\right)=\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right)$$

$\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|$ تمثل $\frac{MC}{MN}$

عمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$ تمثل الزاوية $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right)$

ب) طبيعة المثلث NCM .

$1=\left|i\right|=\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|=\frac{MC}{MN}$ ومنه : $MN=MC$

الزاوية $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right)$ هي عمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$

$$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)=\arg\left(i\right)=\frac{\pi}{2}$$

إذن المثلث NCM قائم الزاوية في M ومتساوي الساقين .

ج) تعيين لاحقة D الرأس الرابع للمربع $NMCD$.

$NMCD$ مربع معناه $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CD}$ يكافئ $Z_{\overrightarrow{MN}}=Z_{\overrightarrow{CD}}$

ومنه : $\left(-2+4i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{11}{2}i\right)=z_D-2-3i$ ومنه :

$\frac{-5}{2}-\frac{3}{2}i=z_D-2-3i$ ومنه : $Z_D=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

إذن لاحقة D هي $Z_D=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}i$.